

2.3 Umkehrfunktionen

In dem Michalis-Menten-Modell für Enzymreaktionen ist die Reaktionsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Konzentration x gegeben. In manchen Fällen möchte man jedoch aus einer bekannten Geschwindigkeit v die Konzentration x bestimmen. Dies führt auf die Frage, ob sich x aus v eindeutig bestimmen läßt, und allgemein zu

DEFINITION 1 Eine Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$$

heißt *umkehrbar*, wenn jeder Funktionswert $y \in W_f$ nur einmal auftritt, d.h. es gibt genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$. Bezeichnet man dieses x mit $f^{-1}(y)$, so wird durch die Vorschrift

$$f^{-1} : W_f \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto f^{-1}(y)$$

die Umkehrfunktion definiert. Es gilt also dann

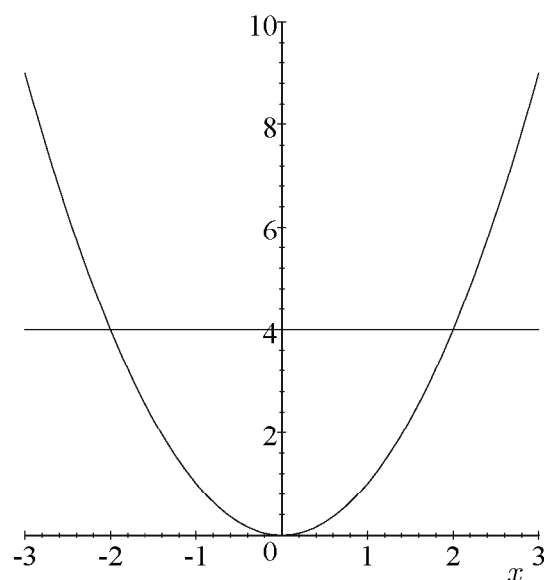
$$y = f(x), x \in D_f \iff x = f^{-1}(y), y \in D_{f^{-1}} = W_f.$$

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ entsteht aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ durch Auflösen nach x .

BEISPIEL 1 Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist nicht umkehrbar, da $y = 4$ Funktionswert zu $x = 2$ und $x = -2$ ist.



BEISPIEL 2 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$$

ist umkehrbar, da

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

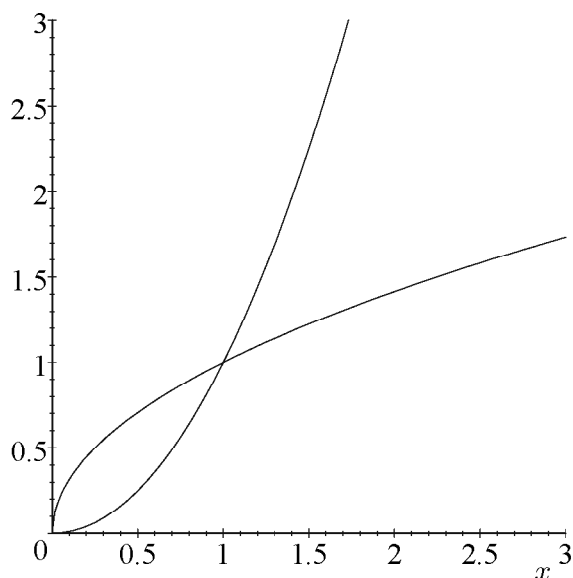
zu

$$x = \sqrt{y} \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

äquivalent ist. Also ist die Umkehrfunktion f^{-1} von f durch

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sqrt{y}$$

gegeben.



BEISPIEL 3 Im Michaelis-Menten Modell (Beispiel 2.2.3) ist die Geschwindigkeitsfunktion v genau dann umkehrbar, wenn $R = 0$ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt. Ist $R \neq 0$, so gibt es zu einem gegebenen v i. a. zwei verschiedene Konzentrationen x_1 und x_2 mit $v(x_1) = v(x_2)$.

Es gilt

HAUPTSATZ Sei f eine umkehrbare Funktion.

(i) Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} von f entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

(ii) Eine Wertetabelle von f^{-1} entsteht aus einer Wertetabelle von f durch Vertauschung der Spalten.

Es gilt

$$(x, y) \in \text{Gr } f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y, x) \in \text{Gr } f^{-1}.$$

Die Vertauschung von x und y entspricht die Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

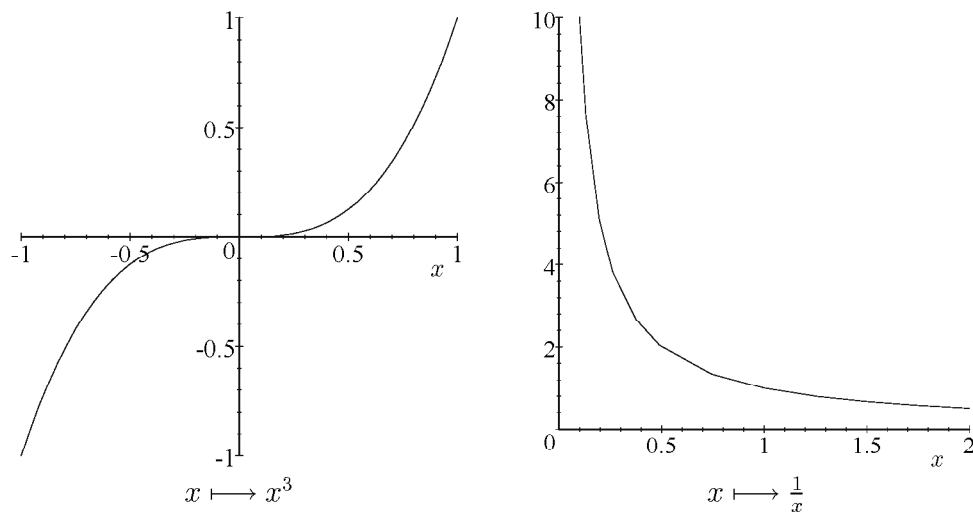
x	$f(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2
\vdots	\vdots

y	$f^{-1}(y)$
y_1	x_1
y_2	x_2
\vdots	\vdots

DEFINITION 2 Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* bzw. *fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.

BEISPIEL 4 Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend.

BEISPIEL 5 Die Funktion $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend.



SATZ Ist eine Funktion f streng monoton wachsend oder fallend, so ist sie umkehrbar.