Beispielaufgabe Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Eine Urne enthält 2 rote, 3 weiße und 5 schwarze Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln **mit einem Griff** entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X = Zahl der weißen Kugeln. Stelle sie als Histogramm (Säulendiagramm) dar.

b) Nun werden 6 Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse:

- A: Es werden nur schwarze Kugeln gezogen
- B: Es wird genau eine weiße Kugel gezogen
- C: Es werden genau 3 rote Kugeln gezogen
- D: Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen
- E: Es werden höchstens 4 schwarze Kugeln gezogen
- F: Man zieht abwechseln schwarz und weiß
- G: Nur die ersten zwei Kugeln sind schwarz, dann folgt noch genau
- eine rote Kugel.
- H: Von jeder Farbe werden genau 2 Kugeln gezogen.
- I: Es werden gleich viele rote und weiße Kugeln gezogen.

c) Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 98%. Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen ?

Lösungen zu a)

Es sei X die Anzahl der weißen Kugeln, davon gibt es 3, also noch 7 nicht weiße.
Beim Ziehen ohne Zurücklegen verwendet man die Hypergeometrische Verteilung:

Es sei X die Zahl der weißen Kugeln. Dann gilt:

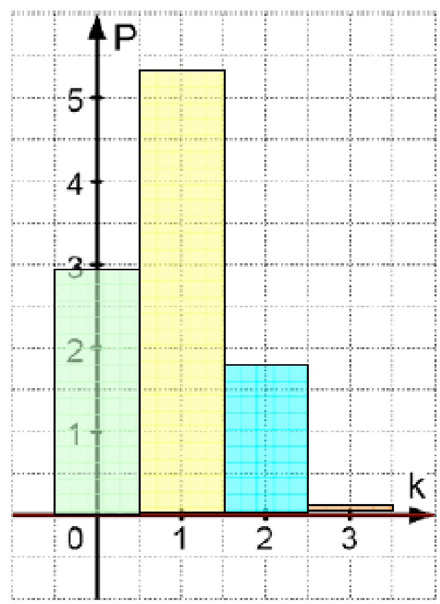
$$\boxed{P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}}} \quad \text{für} \quad k\in\{0;1;2;3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{35}{120}\approx 0{,}2917$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 21}{120}=\frac{63}{120}=0{,}525$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 7}{120}=\frac{21}{120}=0{,}175$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{120}=\frac{1}{120}=0{,}0083$$



Lösungen zu b)

Ziehen von 6 Kugeln mit Zurücklegen mit $p_w = \frac{3}{10} = 0{,}3$ $p_S = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, und $p_r = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$P(A) = 0{,}5^6 = 0{,}0156$

$P(B) = 6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}3025$, denn für die eine weiße gibt es 6 Plätze zur Wahl

$P(C) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot 1{,}6^3 = 20 \cdot 1{,}6^3 \approx 0{,}0819$ (Binomialverteilung !)

Bei D „mindestens eine weiße" verwenden wir das Gegenereignis „keine weiße, also 7 nicht-weiße, deren Wahrscheinlichkeit 0,7 ist:
$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}7^6 \approx 0{,}8824$

E: „Höchstens 4 schwarze Kugeln" bedeutet entweder 0 bis 4 schwarze Kugeln (das sind 5 Berechnungen) oder über das Gegenereignis $\overline{E}$: mindestens 5 schwarze Kugeln, also 5 oder 6. Dies ist weniger Rechenaufwand:

$P(E) = 1 - P(S = 5) - P(S = 6)$ wobei S die Zahl der schwarzen Kugeln bedeuten soll. Es folgt binomial verteilt

$P(S = 5) = 6 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 0{,}5^6$ und $P(S = 6) = 0{,}5^6$ also
$P(E) = 1 - 7 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}8906$

Zu F gibt es genau zwei Pfade: $\begin{cases} w - s - w - s - w - s \\ s - w - s - w - s - w \end{cases}$

Auf beiden stehen je 3 mal w und je 3 mal s:

$P(F) = 2 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}3^3 = 2 \cdot 1{,}5^3 \approx 0{,}00675$

Bei G sind die ersten zwei Ziehungen wahlfrei, erst unter den letzten vier Kugeln gibt es die Wahl 1 rote und 3 nichtrote:

$P(G) = 0{,}5^2 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}3^3 = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}027 \approx 0{,}0054$

H: Wir ziehen zwei rote Kugeln, diese können auf $\binom{6}{2} = 15$ Arten platziert werden. Dann wählen wir auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten die beiden Plätze fir die weißen aus, und die restlichen werden mit blau gefüllt. So ergibt dies $15 \cdot 6 = 90$ Pfade.

Dies kann man auch anders berechnen: 6 Kugeln kann man auf 6! Arten permutieren. Da aber je zwei identisch sind, reduziert sich dies auf $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$ Arten. Es folgt:

$$P(H) = 90 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}081$$

I: Gleich viele rote und weiße Kugeln beinhaltet folgende Möglichkeiten: 3 rote und 3 weiße, oder 2 rote und 2 weiße und dann noch 2 schwarze, oder 1 rote und 1 weiße und dann 4 schwarze, oder nur 6 schwarze:

$$P(I) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}3^3 + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5^4 + 0{,}5^6$$

$$P(I) = 20 \cdot 0{,}06^3 + 15 \cdot 6 \cdot 0{,}030^2 + 30 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5^4 + 0{,}5^6 = 0{,}2811$$

Lösungen zu c)

Es sei R die Zahl der roten Kugeln. R ist binomial verteilt mit p = 0,2.
Gesucht ist n, die Zahl der Ziehungen.

Bedingung: $P(X \geq 1) \geq 0{,}98$

d.h. $1 - P(x = 0) \geq 0{,}98$

$$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}98$$
$$0{,}8^n \leq 0{,}02$$
$$n \cdot \lg 0{,}8 \leq \lg 0{,}02$$
$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}8} \approx 17{,}5$$

Ergebnis: Man muß mindestens 18 mal ziehen, um mit mindestens 98 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen,.